• Ούλοφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
• Θεοδάμαντος 2
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 180
• Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 55

ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΑΛΓΕΒΡΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 3 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2016

ΘΕΜΑ 1ο

Α) **i)** Απόδειξη 1, σχολικό βιβλίο, σελ. 60
ii) Απόδειξη 2, σχολικό βιβλίο, σελ. 60

Β) **i)** Ορισμός, σχολικό βιβλίο, σελ. 32
ii) Ορισμός, σχολικό βιβλίο, σελ. 55
iii Ορισμός, σχολικό βιβλίο, σελ. 74

Γ) **1.** ΛΑΘΟΣ **2.** ΛΑΘΟΣ **3.** ΛΑΘΟΣ **4.** ΛΑΘΟΣ **5.** ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ 2ο

Α) Έχουμε $\begin{cases} 2xy - y^2 - 5y = 0 \ (1) \\ y = x^2 - 4x + 3 \ (2) \end{cases}$.

Από $(1) \Leftrightarrow 2xy - y^2 - 5y = 0 \Leftrightarrow y(2x - y - 5) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ή $2x - y - 5 = 0$.

- Αν $y = 0$, τότε από $(2) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 3$.
  Άρα $\boxed{(x,y) = (1,0)}$ ή $\boxed{(x,y) = (3,0)}$.
- Αν $2x - y - 5 = 0 \Leftrightarrow y = 2x - 5$, τότε από (2) έχουμε:
  $2x - 5 = x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 4$.
  Για $x = 2$, είναι $y = 2 \cdot 2 - 5 \Leftrightarrow y = -1$. Άρα $\boxed{(x,y) = (2,-1)}$.
  Για $x = 4$, είναι $y = 2 \cdot 4 - 5 \Leftrightarrow y = 3$. Άρα $\boxed{(x,y) = (4,3)}$.

Β)

i) Έχουμε $(\Sigma)\begin{cases} \lambda x + 8y = 4\lambda - 4 \\ (\lambda - 1)x + (\lambda + 2)y = 3\lambda - 4 \end{cases}$.

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 8 \\ \lambda - 1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 2) - 8(\lambda - 1) = \lambda^2 + 2\lambda - 8\lambda + 8 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 2)(\lambda - 4).$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4\lambda - 4 & 8 \\ 3\lambda - 4 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (4\lambda - 4)(\lambda + 2) - 8(3\lambda - 4) = 4\lambda^2 + 8\lambda - 4\lambda - 8 - 24\lambda + 32 = 4\lambda^2 - 20\lambda + 24 =$$

$$= 4(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 4(\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda & 4\lambda - 4 \\ \lambda - 1 & 3\lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda(3\lambda - 4) - (4\lambda - 4)(\lambda - 1) = 3\lambda^2 - 4\lambda - 4\lambda^2 + 4\lambda + 4\lambda - 4 = -\lambda^2 + 4\lambda - 4 =$$

$$= -(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = -(\lambda - 2)^2.$$

Έστω $D=0 \Leftrightarrow (\lambda-2)(\lambda-4)=0 \Leftrightarrow \lambda=2$ ή $\lambda=4$.

- Αν $D\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 2$ ή $\lambda \neq 4$, τότε το (Σ) έχει μοναδική λύση την

$$(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=\left(\frac{4(\lambda-2)(\lambda-3)}{(\lambda-2)(\lambda-4)},\frac{-(\lambda-2)^2}{(\lambda-2)(\lambda-4)}\right)\Leftrightarrow \boxed{(x,y)=\left(\frac{4(\lambda-3)}{\lambda-4},\frac{2-\lambda}{\lambda-4}\right)}$$

- Αν $\lambda=2$, τότε το (Σ) γίνεται:

$$(\Sigma)\begin{cases}2x+8y=4\\ x+4y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+4y=2\\ x+4y=2\end{cases}\Leftrightarrow x+4y=2\Leftrightarrow x=2-4y$$

Άρα το (Σ) έχει άπειρες λύσεις της μορφής: $\boxed{(x,y)=(2-4y,y)\ ,\ y\in\mathbb{R}}$

- Αν $\lambda=4$, τότε το (Σ) γίνεται:

$$(\Sigma)\begin{cases}4x+8y=12\\ 3x+6y=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y=3\\ x+2y=\dfrac{8}{3}\end{cases}$$

Άρα το (Σ) είναι αδύνατο.

ii) **α)** Αφού οι ευθείες είναι παράλληλες, τότε το σύστημα είναι αδύνατο, οπότε $\lambda=2$.

β) Για $\lambda=2$ η συνάρτηση γίνεται $f(x)=\dfrac{x^3\sqrt{4-x^2}+2x}{x^{2016}-1}$.

Πρέπει $4-x^2>0\Leftrightarrow x^2<4\Leftrightarrow |x|<2\Leftrightarrow -2<x<2$, άρα $A_g=(-5,5)$.

Πρέπει $x^{2016}-1\Rightarrow x^{2016}\neq 1\Rightarrow x\neq\pm 1$.

Άρα $\boxed{A_f=[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,2]}$.

γ) Για κάθε $x\in A_f$ και το $-x\in A_f$, οπότε:

$$f(-x)=\frac{(-x)^3\sqrt{4-(-x)^2}+2\cdot(-x)}{(-x)^{2016}-1}=\frac{-x^3\sqrt{4-x^2}-2x}{x^{2016}-1}=-\frac{x^3\sqrt{4-x^2}+2x}{x^{2016}-1}=-f(x),$$

άρα η $\boxed{f:\text{περιττή}}$

ΘΕΜΑ 3$^{\text{Ο}}$

Α) **i)** Έχουμε ότι: $\omega\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$, οπότε η γωνία ω ανήκει στο 3ο τεταρτημόριο. Άρα $\eta\mu\omega<0,\ \sigma\upsilon\nu\omega<0$.

Έχουμε: $15\sigma\upsilon\nu^2\omega-4\eta\mu\omega-12=0\Leftrightarrow 15(1-\eta\mu^2\omega)-4\eta\mu\omega-12=0\Leftrightarrow 15-15\eta\mu^2\omega-4\eta\mu\omega-12=0$
$\Leftrightarrow 15\eta\mu^2\omega+4\eta\mu\omega-3=0$, θέτουμε $\eta\mu\omega=x$,οπότε η προηγούμενη εξίσωση γίνεται:
$15x^2+4x-3=0,\ \ \Delta=4^2-4\cdot(15)\cdot(-3)=16+180=196$.

Άρα $x_{1,2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{196}}{2\cdot 15}=\dfrac{-4\pm 14}{30}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{10}{30}=\dfrac{1}{3}>0\\ x_2=\dfrac{-18}{30}=-\dfrac{3}{5}<0\end{cases}$, οπότε $\boxed{\eta\mu\omega=-\dfrac{3}{5}}$.

ii) $\bullet\ \sigma\upsilon\nu^2\omega=1-\eta\mu^2\omega=1-\dfrac{9}{25}=\dfrac{16}{25}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\omega=\pm\sqrt{\dfrac{16}{25}}\overset{\sigma\upsilon\nu\omega<0}{\Leftrightarrow}\boxed{\sigma\upsilon\nu\omega=-\dfrac{4}{5}}$

$\bullet\ \varepsilon\varphi\omega=\dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}=\dfrac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}\Leftrightarrow\boxed{\varepsilon\varphi\omega=\dfrac{3}{4}}$

$\bullet\ \sigma\varphi\omega=\dfrac{1}{\varepsilon\varphi\omega}\Leftrightarrow\boxed{\sigma\varphi\omega=\dfrac{4}{3}}$

iii) $\bullet\ \sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{15\pi}{2}+\omega\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{16\pi-\pi}{2}+\omega\right)=\sigma\upsilon\nu\left(8\pi-\dfrac{\pi}{2}+\omega\right)=\sigma\upsilon\nu\left(-\dfrac{\pi}{2}+\omega\right)=\eta\mu\omega$

$\bullet\ \sigma\upsilon\nu(17+\omega)=\sigma\upsilon\nu(16\pi+\pi+\omega)=\sigma\upsilon\nu(\pi+\omega)=-\eta\mu\omega$

$\bullet\ \varepsilon\varphi\left(\dfrac{11\pi}{2}-\omega\right)=\varepsilon\varphi\left(\dfrac{12\pi-\pi}{2}-\omega\right)=\varepsilon\varphi\left(6\pi-\dfrac{\pi}{2}-\omega\right)=\varepsilon\varphi\left(-\dfrac{\pi}{2}-\omega\right)=\sigma\varphi\omega$

$\bullet\ \sigma\varphi\left(-\dfrac{17\pi}{2}+\omega\right)=\sigma\varphi\left(\dfrac{-16\pi-\pi}{2}+\omega\right)=\sigma\varphi\left(-8\pi-\dfrac{\pi}{2}+\omega\right)=\sigma\varphi\left(-\dfrac{\pi}{2}+\omega\right)=-\varepsilon\varphi\omega$

Άρα $\mathrm{A}=\dfrac{\eta\mu\omega-6\eta\mu\omega}{3\sigma\varphi\omega-4\varepsilon\varphi\omega}=\dfrac{-5\eta\mu\omega}{3\sigma\varphi\omega-4\varepsilon\varphi\omega}=\dfrac{-5\cdot\frac{3}{5}}{3\cdot\frac{4}{3}-4\cdot\frac{3}{4}}=\dfrac{-3}{4-3}\Leftrightarrow\boxed{\mathrm{A}=-3}$

Β) Είναι: $\dfrac{\sigma\upsilon\nu^4x-\eta\mu^4x}{1+2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{(\sigma\upsilon\nu^2x)^2-(\eta\mu^2x)^2}{\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x+2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{(\sigma\upsilon\nu^2x-\eta\mu^2x)(\sigma\upsilon\nu^2x+\eta\mu^2x)}{(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2}=.$

$=\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2x-\eta\mu^2x}{(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2}=\dfrac{(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)}{(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}\overset{\eta\mu x\neq 0}{=}\dfrac{\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}-\frac{\eta\mu x}{\eta\mu x}}{\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}+\frac{\eta\mu x}{\eta\mu x}}=\dfrac{\sigma\varphi x-1}{\sigma\varphi x+1}.$

ΘΕΜΑ 4ο

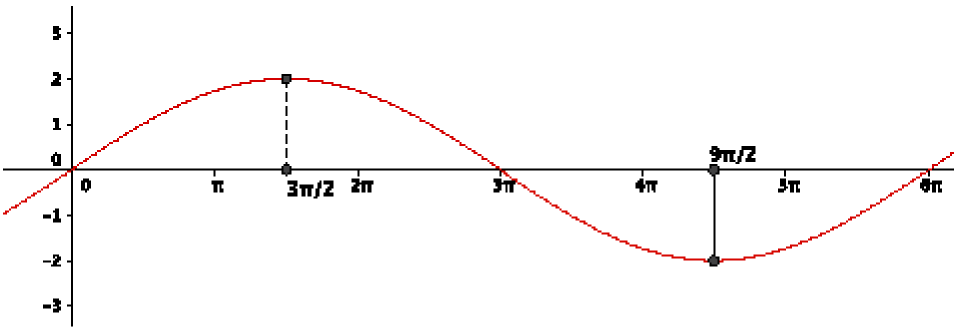
Α)

i) Ισχύει ότι: $\mathrm{T}=\dfrac{2\pi}{\omega}\Leftrightarrow 6\pi=\dfrac{2\pi}{\omega}\Leftrightarrow \omega=\dfrac{2}{6}\Leftrightarrow \boxed{\omega=\dfrac{1}{3}}$.

Επομένως η συνάρτηση γίνεται: $f(x)=\alpha\cdot\eta\mu\left(\dfrac{1}{3}x\right)$.

Έχουμε ότι: $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1\Leftrightarrow \alpha\eta\mu\left(\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)=1\Leftrightarrow \alpha\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=1\Leftrightarrow \alpha\cdot\dfrac{1}{2}=1\Leftrightarrow \boxed{\alpha=2}$.

ii) Έχουμε $f(x)=2\eta\mu\dfrac{x}{3}$. Άρα max = 2, min = -2, T = 6π



Β)

i) $D=\begin{vmatrix}\sigma\upsilon\nu\alpha & -\eta\mu\alpha\\ \eta\mu\alpha & \sigma\upsilon\nu\alpha\end{vmatrix}=\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\eta\mu^2\alpha=1$. Αφού $D\neq 0$, το (Σ) έχει μοναδική λύση.

ii) $D_x=\begin{vmatrix}3 & -\eta\mu\alpha\\ 4 & \sigma\upsilon\nu\alpha\end{vmatrix}=3\sigma\upsilon\nu\alpha+4\eta\mu\alpha$

$D_y=\begin{vmatrix}\sigma\upsilon\nu\alpha & 3\\ \eta\mu\alpha & 4\end{vmatrix}=4\sigma\upsilon\nu\alpha-3\eta\mu\alpha$

Η μοναδική λύση του (Σ) είναι: $(x_0,y_0)=\left(\dfrac{D_x}{D},\dfrac{D_y}{D}\right)=(3\sigma\upsilon\nu\alpha+4\eta\mu\alpha,4\sigma\upsilon\nu\alpha-3\eta\mu\alpha)$

iii) Είναι $\mathrm{A}=x_0^2+y_0^2=(3\sigma\upsilon\nu\alpha+4\eta\mu\alpha)^2+(4\sigma\upsilon\nu\alpha-3\eta\mu\alpha)^2=$

$=9\sigma\upsilon\nu^2\alpha+24\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\alpha+16\eta\mu^2\alpha+16\sigma\upsilon\nu^2\alpha-24\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\alpha+9\eta\mu^2\alpha=$

$=25\sigma\upsilon\nu^2\alpha+25\eta\mu^2\alpha=25(\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\eta\mu^2\alpha)\Leftrightarrow \boxed{\mathrm{A}=1}$